Übungen zu Mathematik I
Blatt 6

Aufgabe 1: Wir betrachten die Fläche eines Kreissegments wie es in Abb. 1 gezeigt wird. Zur Berechnung der Fläche gibt es mehrere Formeln, in denen unterschiedliche Größen verwendet werden. Wir interessieren uns für die Abhängigkeiten zwischen der Segmentfläche und den geometrischen Größen.

a) Es gilt die Näherungsformel:

$$A \approx \frac{2}{3} s \cdot h \,.$$

Wie ändert sich die Fläche, wenn wir die Länge s vergrößern? Vergleichen Sie auch mit der Skizze in Abb. 1.

b) Die exakte Formel, welche die Größe s verwendet, lautet:

$$A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2} \,.$$

Gilt der Zusammenhang zwischen der Größe s und der Segmentfläche immer noch?

c) Die Segmentfläche kann auch über den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ im Bogenmaß berechnet werden:

$$A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha) \,.$$

Wie ändert sich die Fläche, wenn wir den Winkel α ändern? Betrachten Sie zunächst die Skizze in Abb. 1 und analysieren sie anschließend die Formel.

Lösung:

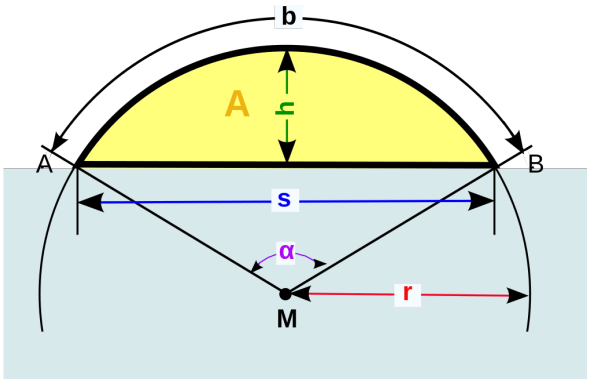


Abbildung 1: Größenbezeichnung beim Kreissegment (Quelle: Wikipedia)

a) Wir betrachten die Formel:

$$A \approx \frac{2}{3} s \cdot h \,.$$

Wenn wir s vergrößern oder verkleinern, geht diese Änderung direkt auf die Fläche über, die auch größer oder kleiner wird. Eine Verdopplung bewirkt also direkt eine Verdopplung.

b) Da sich optisch das Kreissegment vergrößert, wenn wir s vergrößern, sollte der Zusammenhang immer noch gelten. Betrachten wir die exakte Formel:

$$A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2} \,.$$

Da s im Zähler des zweiten Bruchs steht, wird der Bruch größer, wenn wir s vergrößern. Wir ziehen also mehr ab, demnach müsste die Fläche kleiner werden, wenn der erste Bruch konstant bleibt. Dies ist aber nicht der Fall, da sich wenn wir s vergrößern auch der Kreisbogen b vergrößert, was wir deutlich an der Skizze sehen. Die genaue Formel lautet:

$$b = 2r \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)$$

c) Rein optisch erwarten wir eine Vergrößerung der Fläche bei größerem Winkel. Betrachten wir die Formel:

$$A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) \,.$$

Die Sinusfunktion ist im Intervall $[0, \pi/2]$ monoton wachsend, wird also mit α größer. Parallel wächst auch der Wert α von dem der Sinus abgezogen wird. Im Intervall $[\pi/2, \pi]$ fällt der Sinus wieder und ist hier deutlich kleiner als $\alpha > 1$. Um nachweisen zu können, dass die Klammer mit α größer wird, plotten wir beide Funktionen bzw. direkt die Klammer. Abb. 2 zeigt das Ergebnis und bestätigt unsere optische Vermutung.

Aufgabe 2: Ein Werkstück mit spezifischer Wärmekapazität c, Masse m und Oberfläche A wird in einen Ofen der Temperatur 220° gestellt. Die Aufwärmkurve wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$T(t) = 220^\circ - (220^\circ - T_0) \cdot e^{-t/\tau} \,,$$

wobei T_0 die Anfangstemperatur des Werkstückes zur Zeit $t = 0$ beschreibt und die Zeitkonstante τ wie folgt definiert ist:

$$\tau = \frac{mc}{\alpha A} \,.$$

Hierbei gibt α den Wärmeübergang an (Wärmeübergangskoeffizient).

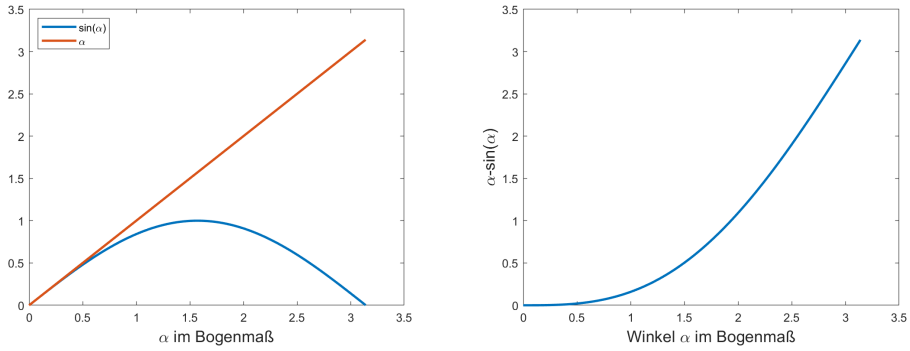


Abbildung 2: Plot der Funktionen $f(\alpha) = \alpha$ und $g(\alpha) = \sin(\alpha)$ bzw. direkt $g(\alpha) = \alpha - \sin(\alpha)$

a) Die Zeitkonstante ist ein Maß dafür, wie schnell der Aufwärmvorgang stattfindet. Sie hängt von den gegebenen Parametern ab. Nehmen wir an, dass wir den Wärmeübergangskoeffizient beeinflussen können. Wie müssen wir dann α verändern (größer oder kleiner machen), um den Prozess zu beschleunigen?

b) Bestimmen Sie die Zeit t_1, bei der das Werkstück die Temperatur $T_1 > T_0$ annimmt.

c) In der Lösung zu Teilaufgabe b) tritt ein Minuszeichen auf. Warum ist die Zeit t_1 trotzdem positiv?

Lösung:

a) Ein kleinerer Wert für τ bedeutet ein schnelleres Aufheizen, was z.B. durch Plotten für unterschiedliche Werte für τ festgestellt werden kann. Wir müssen α also so ändern, dass τ kleiner wird. Da α im Nenner steht bedeutet dies, dass α vergrößert werden muss. Diese Tatsache ist auch physikalisch einleuchtend: Ein größerer Wärmeübergangskoeffizient bewirkt einen besseren Wärmeaustausch, d.h. das Werkstück wird schneller warm.

b) Wir lösen die folgende Gleichung auf:

$$220° - (220° - T_0) \cdot e^{-t_1/\tau} = T_1 \,.$$

Umformen ergibt zunächst:

$$e^{-t_1/\tau} = \frac{220 - T_1}{220 - T_0} \,.$$

Hierauf wenden wir den natürlichen Logarithmus an und formen weiter um:

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{220 - T_1}{220 - T_0}\right) \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\tau \cdot \ln\left(\frac{220 - T_1}{220 - T_0}\right) \,.$$

c) Da $T_1 > T_0$ ist $220 - T_1 < 220 - T_0$ woraus folgt, dass der Bruch im Argument des Logarithmus kleiner eins ist. Daher ergibt sich ein negativer Wert für den Logarithmus, der durch das Minuszeichen kompensiert wird und somit eine positive Zeit t_1 ergibt.

Aufgabe 3: Strom und Spannung besitzen an einer Kapazität und einer Induktiviät eine Phasenverschiebung, wie in Abb. 4 gezeigt wird. Bestimmen Sie die Gleichungen, welche die Situation in der Abbildung beschreiben.

Lösung: Wir beginnen mit der rechten Darstellung, d.h. der Kapazität: Wenn wir von der Spannung (blaue Kurve) als Bezugspunkt ausgehen, dann wird diese als Sinus mit der Amplitude 1.5 beschrieben:

$$U = 1.5 \sin(\varphi) \,.$$

Der Strom hat die Amplitude eins und ist um $\pi/2$ nach links verschoben, daher erhalten wir:

$$I = \sin(\varphi + \pi/2) \,.$$

Die Spannung bei der Induktivität ist identisch. Der Strom ist jetzt nach rechts verschoben:

$$I = \sin(\varphi - \pi/2) \,.$$

Aufgabe 4: Als Gewinnschwelle oder break-even point bezeichnet man in den Wirtschaftswissenschaften den Punkt, an dem Erlös und Gesamtkosten einer Produktion gleich hoch sind und somit weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet wird. Aus mathematischer Sicht müssen wir Schnittpunkte von Funktionen berechnen, was wir im Folgenden üben wollen. Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ und $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 2$ und $g(x) = 2x^2 - 2$

Lösung:

a) Gleichsetzen liefert die Nullstellenaufgabe:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Wir können mit Polynomdivision oder Horner Schema faktorisieren:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2) \,,$$

daher lauten die Schnittpunkte $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_3 = 2$.

b) Gleichsetzen liefert die Nullstellenaufgabe:

$$x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x = 0$$

Durch Ausklammern erhalten wir die erste Nullstelle $x_1 = 0$. Anschließend können wir mit Polynomdivision oder Horner Schema faktorisieren:

$$x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x = x(x-2)(x+2)(x+3)\,,$$

daher lauten die Schnittpunkte $x_1 = 0$, $x_{1,2} = \pm 2$ und $x_3 = -3$.

Aufgabe 5: Wir betrachten das Skalarfeld

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Bestimmen Sie die Höhenlinien. Welche Form haben diese?

b) Leiten Sie das Skalarfeld bzgl. x und y ab.

c) Skizzieren Sie die Höhenlinien. Bilden aus den beiden Ableitungen aus Teil b) einen Vektor, wobei die Ableitung nach x die x-Komponente bildet und die Ableitung nach y die y-Komponente. Fügen Sie das so entstandene Vektorfeld zu ihrer Skizze hinzu. Was stellen sie fest? Wie sehen die Feldlinien zu diesem Vektorfeld aus?

Lösung

a) Wir betrachten $x^2 + y^2 = C$. Es liegen konzentrische Kreise um den Ursprung vor, wobei $\sqrt{C}$ den Radius angibt.

b) Die Ableitungen lauten: $\partial_x f(x, y) = 2x$ und $\partial_y f(x, y) = 2y$. Hinweis: Die Studierenden kennen noch keine partiellen Ableitungen und auch noch keinen Gradienten. Dies ist eine Vorübung.

c) Die Skizze wird in Abb. 3 gezeigt. Das Vektorfeld ist natürlich der Gradient und steht damit senkrecht auf den Höhenlinien. Die Feldlinien sind Ursprungsgeraden, die ebenfalls senkrecht die Kreise schneiden. Das Vektorfeld liegt tangential zu den Feldlinien.

Aufgabe 6: Auf eine Kette, die an zwei Punkten aufgehängt wird, wirkt die Schwerkraft, wodurch die Kette durchhängt. Die mathematische Kurve, die dieses Durchhängen beschreibt, wird Kettenlinie genannt und kann durch den Kosinus hyperbolicus beschrieben werden.

Die Funktionen Sinus und Kosinus hyperbolicus werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{aligned}$$

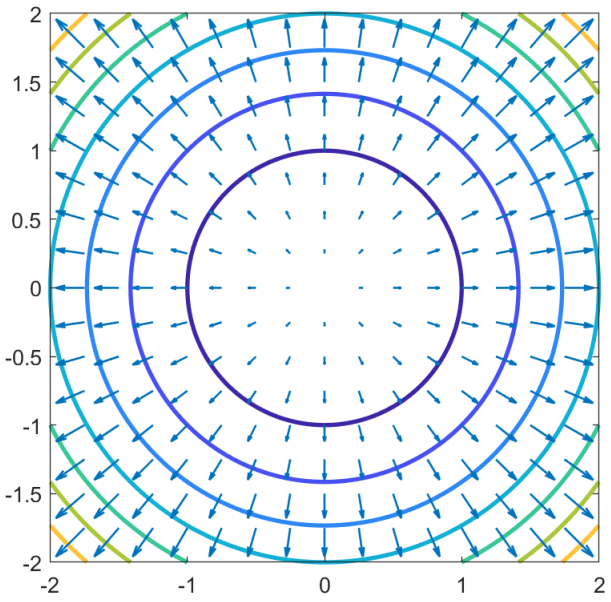


Abbildung 3: Skalarfeld und Vektorfeld (= Gradient) zu Aufg. 5

Zeigen Sie durch einfaches Nachrechnen, dass die folgenden beiden Zusammenhänge gelten, die an die standard Sinus- und Kosinus-Funktionen erinnern (daher der Name):

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \end{aligned}$$

Lösung: Wir setzen die Definition auf der linken Seite ein und rechnen nach:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2$$

Anwenden der ersten und zweiten binomischen Formel liefert für die Klammer:

$$\frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\right) = 4$$

Wir addieren die beiden Definitionen und erhalten:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = e^x$$

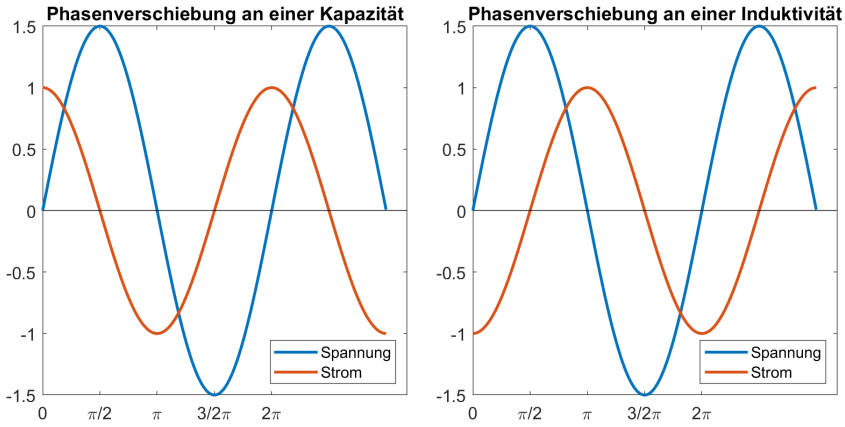


Abbildung 4: Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an einer Kapazität und einer Induktivität.



Abbildung 5: Durchhängen einer Kette (Quelle: Wikipedia)